

REFERENCIA: Gallart, C., Ferrando, I. & García-Raffi, L.M. (2018). Análisis del rol del profesor en la gestión de una actividad de modelización mediante un estudio de caso único. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 33(2). Enlace web: <http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos> - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

ANÁLISIS DEL ROL DEL PROFESOR EN LA GESTIÓN DE UNA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN MEDIANTE UN ESTUDIO DE CASO ÚNICO

ANALYSIS OF THE TEACHER'S ROLE IN THE MANAGEMENT OF A MODELLING ACTIVITY THROUGH A SINGLE CASE STUDY

Cesar Gallart^a

gallartcesar@hotmail.com

Irene Ferrando^b

irene.ferrando@uv.es

Luis Miguel García-Raffi^c

lmgarcia@mat.upv.es

^a Universidad Cardenal Herrera CEU, Valencia (España)

^b Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España)

^c Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada.
Universitat Politècnica de València (España)

Recibido: 05/12/2017

Aceptado: 06/12/2018

Resumen:

La investigación que presentamos tiene por objetivo caracterizar los distintos roles que el profesor puede asumir durante la gestión de una actividad basada en la resolución de tareas de modelización con alumnos de 3ºESO (14-15 años). Partiendo de la taxonomía propuesta en la literatura sobre los roles del profesor durante una actividad de modelización, analizaremos, a través de un estudio de caso único, las transcripciones de los debates que se originan entre los alumnos y el profesor, identificando su desencadenante, el objetivo que cumplen, el tipo de intervención y el momento en que se producen. Gracias a este análisis, hemos podido identificar nuevos roles que ponen de manifiesto la importancia de la comunicación de las resoluciones y su posterior debate en la fase de validación del proceso de modelización.

Palabras clave: modelización; educación secundaria; gestión del aula; interacciones; rol del profesor.

Abstract:

The research aims to characterize the roles that the teacher can assume during the management of modeling activity with ninth grade students (14-15 years). The starting point is the taxonomy on the roles of the teacher during a modeling activity proposed in the literature. Then, we will analyze, through a single case study, the transcripts of the debates originated between the students and the teacher. We will identify their trigger, the objective, the type of intervention and the moment in which they occur. This analysis is the key to identify new roles that highlight the importance of the communication of resolutions and their subsequent debate in the validation phase of the modeling process.

Key words: modelling; secondary education; classroom management; interactions; role of the teacher.

1. Introducción

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria, se observa que la práctica de procesos de matematización y modelización en contextos reales cobra, progresivamente, mayor relevancia (Calabuig et al., 2015, Ferrando et al., 2015). A nivel internacional, una muestra de esta tendencia es el énfasis en la evaluación de las competencias matemáticas en resolución de problemas contextualizados de las pruebas PISA de la OCDE (OCDE, 2006). Sin embargo, la introducción efectiva en el aula de este tipo de actividades no está exenta de dificultades; diferentes autores se han centrado en analizar las dificultades de los profesores al implementar tareas de modelización en el aula, realizadas habitualmente como actividad colaborativa en agrupamientos reducidos (García y Ruíz, 2011, Blomhøj y Kjeldsen, 2006, Cabassut y Ferrando, 2017). Además, diversos proyectos, con distintos enfoques respecto a la naturaleza de las tareas propuestas, pretenden ayudar a usar la modelización como recurso didáctico. En el ámbito europeo destacamos el proyecto LEMA (Maaß y Gurlitt, 2011) y los proyectos PRIMAS y MasCil (Quesada et al., 2014).

Una característica básica en la implementación de una actividad de modelización en el aula es la existencia de una interacción entre profesor y alumnos mucho más rica y compleja que en la clase tradicional y que, además, juega un papel determinante en el desarrollo de la actividad (Stender et al, 2017, Stender y Kaiser, 2015). En este artículo centramos nuestra atención en la figura del profesor con el objetivo de caracterizar sus intervenciones durante los debates iniciados en el desarrollo de la resolución de tareas de modelización. Esta caracterización pretende ayudar a definir el papel que debe jugar el profesor durante una actividad de modelización y, además, poner en valor la importancia de los procesos comunicativos y el debate como elemento de validación y evaluación de los resultados.

2. Referentes teóricos.

La modelización es el proceso de resolución de un problema real en el que se ven involucrados conceptos, métodos y resultados propios de las matemáticas (Blum y Niss, 1991). Para ello, los objetos, datos y relaciones involucrados en la realidad son trasladados al mundo de las matemáticas (matematización horizontal), obteniendo así un modelo matemático. Sobre este modelo se aplican los métodos matemáticos que derivarán en una solución matemática (matematización vertical), que debe interpretarse y validarse en el mundo real en el que se enmarca el problema, dando lugar a la solución real (de nuevo, matematización horizontal). Si

es necesario el proceso puede repetirse, con una modificación total o parcial del modelo. Finalmente, el resultado de este proceso debe ser comunicado. Este doble proceso de matematización (vertical y horizontal) transita a lo largo de una serie de fases, entre el mundo real y el mundo matemático, que configuran el denominado ciclo de modelización (Borromeo, 2006). Para transitar con éxito a lo largo de estas fases, los alumnos deben activar una serie de competencias, englobadas en la llamada Competencia en Modelizar (Gallart et al., 2015b), que incluye también aspectos relacionados con la metacognición, la motivación o las propias creencias sobre la naturaleza de las matemáticas (Maaß, 2006).

La introducción de la modelización en el aula implica una modificación en el proceso de enseñanza-aprendizaje que trae consigo un cambio en el papel que el profesor y el alumno deben adoptar, si lo comparamos con el que desempeñan en una enseñanza tradicional (Doerr, 2006). Burkhardt (2006) propone una clasificación de los roles que asume el profesor durante una actividad de modelización, en contraposición a los que asume en una clase tradicional o “imitativa” (ver Figura 1). En la clase tradicional, el profesor adopta el papel protagonista, transmisor del conocimiento, como “director” (*manager*, en el original en inglés), “expositor” (*explainer*) y “encargado de proponer tareas” (*task setter*), mientras que los alumnos tienen un papel pasivo, siguiendo en todo momento sus indicaciones. Durante una actividad de modelización, los alumnos asumen un papel activo, tomando el control del proceso, proponiendo y llevando a cabo sus propias estrategias de resolución, supervisados por el profesor que asume el papel de “asesor” (*counsellor*), “observador” (*fellow student*) y “gestor de recursos” (*resource*). El contraste entre estos dos estilos de enseñanza, “dirigido”, altamente regulado por el profesor, y “operativo-estratégico”, en el que los alumnos trabajan de forma independiente y autónoma, puede verse también en Leiss et. al (2010). Sin embargo, este cambio de paradigma puede llevar al profesor a un dilema (Blomhøj y Jensen, 2006): por un lado, la necesidad de que el alumno sea autónomo y tome sus propias decisiones; por otro lado, que las decisiones que tome sean adecuadas y le permitan desarrollar con éxito la actividad. La definición del rol que el profesor debe asumir durante el proceso de modelización puede ayudar a superar este dilema.

for imitative learning	for modelling, add
Directive roles	Facilitative roles
Manager	Counsellor
Explainer	Fellow student
Task setter	Resource
with students as	with students as
Imitator	Investigator
Responder	Manager
	Explainer

Figura 1. Roles en una clase imitativa y en una clase basada en la modelización, en Burkhardt (2006, p. 188)

Blum y Borromeo (2009) señalan que, durante la resolución de una tarea de modelización, el profesor debe gestionar la actividad de sus alumnos mediante lo que denominan “intervenciones estratégicas”. Éstas deben posibilitar el avance en el proceso de resolución de la tarea sin interferir ni limitar, en la medida de lo posible, la autonomía de los alumnos. Estas intervenciones (clasificadas en Borromeo y Blum, 2011, según sus niveles, objetivos y causas) se realizan mediante preguntas que lleven a los alumnos a reflexionar sobre su propio proceso de modelización, posibilitando los denominados “espacios de interacción” (Barbosa, 2006). Según

Gallart et al. (2015a), el debate que se genera en estos espacios de interacción puede ser de dos tipos: el que se da en el transcurso de las discusiones dentro del propio grupo de trabajo, cuando sus miembros exponen, consensuan o reflexionan sobre su propio proceso de resolución, denominado “debate intragrupo”, y el que se produce entre los miembros de distintos grupos de trabajo que han resuelto la misma tarea, cuando intercambian ideas y contrastan soluciones y estrategias, en el denominado “debate intergrupo” (ver también Gallart, 2016). Además, estas intervenciones del profesor durante el trabajo en grupo de sus alumnos pueden generar oportunidades de aprendizaje matemático, tal y como se recoge en los trabajos de Morera (2013) y Ferrer et al. (2014).

Con estos antecedentes, el objetivo del presente estudio es analizar, en el marco de una actividad de modelización en el aula de secundaria, y a partir de la taxonomía propuesta por Burkhardt (2006), las intervenciones estratégicas del profesor y el papel que desempeñan durante los debates, tanto intragrupo como intergrupo (Gallart et al., 2015a), que se producen durante toda la actividad. Para ello, presentaremos a continuación la metodología llevada a cabo durante este estudio, para después identificar y caracterizar los distintos roles que asume el profesor en estas intervenciones. Esta identificación y caracterización nos permitirá establecer nuevos roles del profesor relacionados con la fase de validación del ciclo de modelización.

3. Metodología

A lo largo de cinco sesiones de una hora, los diecinueve alumnos de un grupo natural de tercero de secundaria (14-15 años) realizaron, en pequeños grupos de trabajo (de dos o tres miembros) una actividad de aula consistente en la resolución de una tarea de modelización. El objetivo principal de esta actividad es que los alumnos aprendan a enfrentarse a tareas que involucren el uso de las matemáticas en un contexto real, mediante la construcción de un modelo matemático reutilizable y trasladable a otras situaciones similares. Los alumnos no tenían experiencia previa con la resolución de este tipo de tareas. La actividad fue dirigida por uno de los investigadores, que es asimismo el profesor titular de la materia y que contaba ya con cierta experiencia en modelización.

Durante la primera sesión, el profesor presenta a los alumnos los objetivos, metodología, temporalización y criterios de evaluación de la actividad que van a desarrollar. Se forman, libremente, los grupos de trabajo y cada uno escoge una tarea a resolver, de entre las distintas propuestas por el profesor (pueden verse estas tareas en Gallart, 2016). Para la resolución de las tareas los alumnos dispondrán de tres sesiones (de la segunda a la cuarta) y deberán detallar en un diario los resultados de cada una.

Durante el desarrollo de la actividad, los alumnos del mismo grupo comparten un mismo espacio de trabajo y trabajan de forma autónoma. Se pretende que sean ellos los que dirijan su propio proceso de resolución, observados y apoyados por el profesor, tal y como se ha comentado en la sección anterior. En caso de tener que recabar información de algún tipo, disponen de ordenadores en el aula o pueden salir, si es necesario, para obtener los datos que necesiten in situ, ya que algunas de las tareas propuestas se sitúan en el propio colegio.

En la quinta sesión cada grupo debe exponer su resolución ante el resto de compañeros, utilizando como apoyo una presentación de diapositivas digitales mediante una pizarra digital. En la exposición intervienen todos los miembros del grupo, pudiendo formularse preguntas, tanto por parte del profesor como del resto de alumnos, a cualquiera de ellos. Se quiere con esto alentar la máxima participación e implicación de todos los integrantes del grupo de trabajo. La secuenciación de la actividad puede verse, de forma resumida, en la Tabla 1.

<i>Sesión</i>	<i>Organización</i>	<i>Actividad</i>
1	Grupo clase	Presentación actividad. Selección de la tarea y formación de grupos de trabajo
2, 3, 4	Grupos de trabajo	Resolución de la tarea escogida
5	Grupo clase	Exposición de cada grupo de su resolución y debate en gran grupo

Tabla 1. Estructura de la secuencia didáctica

Durante las sesiones 2, 3 y 4, el profesor monitoriza el trabajo de todos los grupos que se forman (un total de siete en esta experiencia). Para ello, en cada sesión se acerca, al menos una vez, a cada uno de los grupos para interesarse por la evolución de su resolución. Este acercamiento del profesor, por propia iniciativa, permitirá a los alumnos, como podremos constatar en las transcripciones de sus conversaciones, recapitular, reflexionar y profundizar en su propio proceso de resolución.

En este artículo hablaremos de la resolución de la tarea “La desaparición del portátil”, escogida por dos grupos de alumnos, cuyo enunciado se muestra en la Figura 2. Esta tarea sigue los criterios establecidos en el proyecto LEMA¹, así como los principios de construcción de las llamadas Modeling-Eliciting Activities (abreviadamente MEAs², véase también Lesh y Doerr, 2003):

- Pertenecer a contextos reales y cercanos al alumno.
- Ser de respuesta abierta, en el sentido de que no hay un procedimiento de resolución fijado de antemano ni una única solución posible. Así, podemos hablar de soluciones aceptables, según se ajusten a la situación real propuesta, y ricas, si pueden ser reutilizables y generalizables a otras situaciones similares a la planteada.
- Abarcar el ciclo completo de modelización y precisar de distinto contenido matemático para su resolución.

La desaparición del portátil

Esta mañana nos hemos dado cuenta de que ha desaparecido uno de los portátiles que utilizamos en el colegio. Como vuestro grupo fue el último que lo utilizó, la directora os ha encargado que dirijáis la búsqueda. No hay pista sobre su posible localización, salvo que puede encontrarse en cualquier aula del colegio (a excepción del comedor y las cocinas, donde seguro que no está). ¿Cómo vais a organizar la búsqueda? ¿Cuánto tiempo creéis que os llevará el registro del colegio?

Figura 2. Enunciado de la tarea propuesta

Para la presente investigación, nos hemos centrado en el análisis de un único caso, un grupo de tres alumnos (que llamaremos grupo A) que realizó la tarea “La desaparición del portátil”. El profesor-investigador grabó el audio de todas sus intervenciones con este grupo a lo largo de las tres sesiones de trabajo en el aula y la sesión de exposición, con el fin de transcribirlas y analizarlas posteriormente. Se recogió también el diario realizado por los alumnos y las diapositivas digitales que utilizaron en su presentación, con el fin de completar la información. Aunque se trata de una investigación basada en el estudio de un único caso, se describe además la resolución aportada por el otro grupo de tres alumnos que realizó la misma tarea (grupo B), con el fin de analizar el debate que se produjo entre ambos grupos durante la presentación final.

¹ Ver: <http://www.lemma-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php>

² Ver: <http://serc.carleton.edu/sp/library/mea/index.html>

4. Análisis de los episodios

Para analizar las intervenciones del profesor nos hemos apoyado en las transcripciones de las grabaciones y los documentos recogidos durante la experiencia y que han sido examinados, primero independientemente por cada uno de los miembros del grupo de investigación y, posteriormente, en conjunto para detectar y corregir errores en las interpretaciones individuales.

Hemos dividido los debates surgidos entre alumnos y profesor durante estas sesiones en episodios, de forma similar a Morera (2013), para los dos tipos de debates identificados por Gallart et al. (2015a): el debate intragrupo y el debate intergrupo. En los episodios que mostramos como ejemplo de estos debates, hemos interpretado la intervención del profesor y la participación de los alumnos a partir de la taxonomía utilizada por Morera (2013), y hemos identificado el rol asumido por el profesor en cada una de sus intervenciones según la clasificación propuesta por Burkhardt (2006), según se recoge en la Tabla 2.

Rol del profesor	Intervenciones didácticas del profesor y participación de los alumnos	
	Gestión de la discusión	Participación de los alumnos
Observador. Asesor. Gestor de Recursos.	Recapitulación Establecimiento de consenso. Petición de formalización, de argumentación, de generalización, de conexión, de comprobación. Validación. Invitación a la formalización, a la argumentación, a la generalización, a la participación. Ampliación de la explicación. Formalización. Aclaración. Corrección de vocabulario o de procedimiento Matemático.	Validación. Aclaración. Complemento de la explicación. Refutación o contraste de soluciones. Asentimiento. Petición de aclaración. Exposición.

TABLA 2. Taxonomía utilizada para el análisis de las transcripciones de los debates profesor/alumnos, basada en Burkhardt (2006) y Morera (2013)

4.1. El debate intragrupo

En la tarea “La desaparición del portátil” se pide a los alumnos que diseñen un plan de búsqueda y calculen cuánto tiempo les llevará encontrar el portátil perdido. A continuación, mostraremos extractos de las actuaciones del profesor durante el debate intragrupo desarrollado entre los miembros del grupo A en cada una de las tres sesiones de trabajo.

Primera sesión de trabajo en el aula (sesión 2)

Transcurridos unos 15 minutos, el profesor se aproxima a la mesa en la que se encuentran trabajando y decide intervenir preguntándoles por el estado actual de su proceso de resolución.

En la Tabla 3 mostramos un episodio del debate acontecido durante esta sesión, en el que el profesor pregunta a sus alumnos cómo están organizando su trabajo.

Transcripción			Interpretación	
1	P	¿Cómo lo estáis organizando todo?	<i>Intervención: Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador</i>
2	A1	Las tres personas van a todas las aulas.	<i>Participación: Exposición de sus suposiciones y conjeturas</i>	
3	A2	Van juntos.		
4	A1	Hay que saber el número de aulas, lógicamente.		
5	A2	La media de los alumnos para saber cuántas mesas hay, por ejemplo... o sea en cada aula.		
6	A1	El tamaño del objeto porque... bueno, es un ordenador... [risas de sus compañeros] vale, vale.		

Tabla 3. Extracto del debate intragrupo durante la sesión 2

La intervención del profesor en esta fase inicial, en [1, Tabla 3], da pie a que los alumnos verbalicen sus conjeturas y suposiciones, adoptando un papel que hemos identificado con el de “observador”, y cuya finalidad última es documentar su proceso de resolución. Los alumnos le detallan sus supuestos (los tres irán juntos en la búsqueda) y las variables que han seleccionado (número de personas que buscan, número de aulas, mesas y casilleros por aula).

En el siguiente episodio, Tabla 4, también en esta primera sesión de trabajo, los alumnos piden consejo al profesor.

Transcripción			Interpretación	
1	P	¿Alguna idea más... de qué hacer? ¿Alguna variable más?	<i>Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador</i>
2	A1	Una ecuación en plan... con todo...	<i>Exposición</i>	
3	A3	Una gráfica.		
4	A1	¿Se puede hacer gráfica con 15 cosas de estas? [se refiere a las ideas clave que han seleccionado: mesas, casilleros, número de aulas].	<i>Petición de aclaración</i>	
5	P	No lo sé. No se lo qué vais a hacer o dejar de hacer.	<i>Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador</i>
6	A1	Pues todo. Es que es muy raro esto. No se puede [se refiere a resolver el problema].	<i>Exposición</i>	
7	A2	Si que se puede...		
8	P	Pero vamos a ver. Hay que olvidarse un poco... Tú me estás hablando de una gráfica, me estás hablando de las gráficas funcionales, y las gráficas funcionales solo tienen en cuenta dos variables...	<i>Explicación</i>	<i>Rol: Asesor</i>
9	A1	Ya	<i>Asentimiento</i>	

Tabla 4. Extracto del debate intragrupo durante la sesión 2

Durante este episodio la discusión gira en torno a las creencias que tienen los alumnos sobre las matemáticas y sus aplicaciones. Se observa cómo quieren aplicar los conocimientos matemáticos que acaban de aprender en la asignatura (funciones y gráficas). En [4, Tabla 4] preguntan directamente al profesor y le plantean sus dudas. En [5, Tabla 4], el profesor les indica

que deben ser más precisos y exponer lo que pretenden hacer. Finalmente, en [8, Tabla 4], y adoptando el papel de “asesor”, les aconseja que no se centren en lo último que han visto en clase. Como asesor, debe aclarar sus dudas y aconsejarles, si así lo demandan, pero de una forma indirecta.

Segunda sesión de trabajo en el aula (sesión 3)

Esta sesión se realiza dos días después de la primera, de modo que los alumnos han podido recabar la información y realizar las mediciones y estimaciones (utilizando cronómetro y cinta métrica para ello) que necesitan para resolver la tarea. Esta parte del trabajo se ha realizado fuera del aula y sin el control del profesor; al iniciar la sesión, éste se acerca de nuevo a su mesa y les pregunta por el estado actual de su proceso de resolución. El modelo que han construido considera tres variables: el número de aulas, clasificadas en dos tipos, aulas grandes (6) y aulas normales (36); el tiempo que se tarda en registrar cada tipo de aula (7 minutos para las grandes y 5 minutos para las pequeñas), que estiman a partir de las mediciones que han tomado; y el número de alumnos que participan en la búsqueda (3). Así, y tal y como ellos exponen, el tiempo de búsqueda será de, $36 \times 5 + 6 \times 7 = 222$ minutos. Como son tres los que buscan, el tiempo máximo de búsqueda será de, $222 : 3 = 74$ minutos, aproximadamente. Es por tanto un modelo limitado a la realidad del colegio, basado en estimaciones y simples cálculos aritméticos. Además, y como se señala durante la conversación, no se han tenido en cuenta algunos aspectos importantes (como el tiempo que se tarda en ir de un aula a otra, o la ruta óptima para recorrer todas las aulas en el menor tiempo posible). En la Tabla 5 se muestra un episodio del debate que se genera durante esta sesión.

Transcripción			Interpretación	
1	P	¿Y si en vez de 36 aulas hubieran 20?	<i>Invitación a la reflexión</i>	<i>Rol: Gestor de recursos</i>
2	A1	Pues lo mismo, pero en vez de multiplicar por 36 multiplicas por 20.	<i>Aclaración</i>	
3	P	¿Y eso, de alguna manera, sabríais como plasmarlo... para que alguien, en su colegio, por ejemplo, pudiera averiguar cuánto tardaría? [se refiere al tiempo que tardarían en registrar el colegio]	<i>Invitación a la reflexión</i>	<i>Rol: Gestor de recursos</i>
4	A1	Lo que hemos hecho mentalmente lo escribimos en papel.	<i>Explicación</i>	

Tabla 5. Extracto del debate intragrupo durante la sesión 3

En este episodio el objetivo del profesor es incitar a los alumnos al uso del lenguaje algebraico para obtener un modelo más rico, en el sentido de generalizable y reutilizable, en [1, Tabla 5] y [3, Tabla 5], pero intentando no aportar más información de la estrictamente necesaria, de nuevo, y como en el episodio anterior, de forma indirecta, a través de la formulación de preguntas. El profesor adopta, en este caso, el papel de “gestor de recursos”, proporcionando a los alumnos ideas, estrategias y/o procedimientos que no han tenido en cuenta y que abren nuevas vías de resolución, o ayudándolos a centrar y focalizar el problema que tratan de resolver.

Tercera sesión de trabajo en el aula (sesión 4)

Esta es la última sesión de trabajo en el aula antes de la exposición final. Los alumnos empiezan describiendo su resolución de la tarea, que no dista demasiado de la propuesta en la sesión anterior. Lo que aportan como novedad es la estimación del tiempo que se tarda en recorrer el colegio en una ruta óptima que les lleve a visitar todas las aulas. En la Tabla 6 mostramos un episodio del debate que mantienen con el profesor.

Transcripción			Interpretación	
1	P	Entonces, ¿qué matemáticas utilizáis en este problema?	<i>Petición de aclaración</i>	<i>Rol: Asesor</i>
2	A1	¿Cómo vas a resolver matemáticamente el problema?	<i>Petición de explicación</i>	
3	P	¿No se utiliza ninguna?	<i>Petición de aclaración</i>	<i>Rol: Asesor</i>
4	A1	Yo es que aquí en este problema no...	<i>Exposición</i>	
5	P	¿No ves que sea un problema de matemáticas?	<i>Invitación a la reflexión</i>	<i>Rol: Gestor de recursos</i>
6	A1	No [muy bajito]	<i>Asentimiento</i>	
7	P	¿A2? [pregunta directamente a ese miembro del grupo].	<i>Invitación a la participación</i>	
8	A2	No [contesta también muy bajito]	<i>Asentimiento</i>	
9	P	O sea, ¿qué os ha parecido entonces el problema?	<i>Invitación a la participación</i>	<i>Rol: Observador</i>
10	A1	Pues no lo sé... ¡Es que no tiene sentido este problema! [exclama enfadado] Porque tú cuando vas a buscar algo piensas, a ver, yo, ¿dónde he estado? Estaba aquí, aquí y allí. Vas allí, lo primero allí primero. O entras en un aula y dices, ¿habéis visto un portátil? No te pones a buscarlo con matemáticas.	<i>Exposición</i>	

Tabla 6. Extracto del debate intragrupo durante la sesión 4

En esta sesión el profesor invita a la reflexión y el cuestionamiento del modelo que le han presentado. El papel que adopta el profesor en este caso es el de “asesor”, en [1, Tabla 6] y [3, Tabla 6], y su objetivo es ayudar a los alumnos, a través de la formulación de preguntas, a superar este bloqueo propiciado por sus creencias sobre lo que ellos entienden que debe ser un problema de matemáticas. Esto les impide ir más allá de su modelo aritmético, basado en estimaciones de tiempo (prácticamente igual al presentado en la sesión anterior). En [5, Tabla 6], como “gestor de recursos”, intenta que los alumnos se centren en las matemáticas que hay tras el problema. En [9, Tabla 6], y ahora como “observador”, pretende que los alumnos vuelvan atrás y expongan su opinión sobre la tarea. En [10, Tabla 6] los alumnos muestran su desconcierto ante el problema propuesto. Para ellos no tiene sentido y no puede ser abordado matemáticamente. Esto supone una dificultad añadida a la del propio problema, que será superada tras una revisión y modificación de su modelo.

En el siguiente apartado analizaremos la actuación del profesor durante el debate intergrupo, en la sesión 5 de presentación final de los trabajos.

4.2. El debate intergrupo

Una de las particularidades de las tareas de modelización implementadas en esta experiencia es que el resultado debe ser comunicado, así, la finalidad de la exposición pública de los trabajos es, precisamente, posibilitar su evaluación, y como veremos, también validar la resolución propuesta mediante el contraste de opiniones entre alumnos. Es precisamente este contraste el que motiva y fundamenta al debate intergrupo. Para poder analizar este debate entre grupos que han resuelto la misma tarea, describiremos, brevemente, cuáles fueron las resoluciones presentadas por dos grupos (A y B).

Tras el debate transcrito y analizado en la Tabla 6, el grupo A revisa y modifica su modelo. Este trabajo de revisión continúa durante el resto de la sesión 4, pero ya sin la supervisión directa del profesor. Finalmente, en la sesión 5, presentan un nuevo modelo algebraico de resolución (ver Figura 3). Este modelo supone una mejora con respecto al expuesto al profesor y comentado en el episodio de la Tabla 6; en efecto, se definen claramente las variables relevantes (número de personas que buscan, distancia recorrida, número de escondrijos, etc.) que se relacionan en una fórmula algebraica que permite obtener el tiempo total de búsqueda. El modelo obtenido es reutilizable y generalizable a otras situaciones y su diseño demuestra un mayor dominio del lenguaje matemático. Utilizando su fórmula y a partir de los cálculos y estimaciones que han realizado, han llegado a un resultado: son necesarios 58 minutos para encontrar el portátil.

$$TT = [H \times (E \times T)] / N + D / V$$

Donde:
TT : tiempo total de encontrar el objeto
N: número de personas que buscan= 3
H: número de habitaciones= 43
T: tiempo medio que tardamos en registrar los escondrijos= 5 segundos/escondrijo
E: Nº de escondrijos por clase= 40
D: distancia total del recorrido en metros= 1200 m
V: velocidad de desplazamiento= 2 metros/segundo

$$TT = [H \times (E \times T)] / N + D / V = [43(40 \times 5)] / 3 + 1200 / 2 = 3466 \text{ segundos} = 58 \text{ min aprox.}$$

Figura 3. Fórmula general diseñada por el grupo A para calcular el tiempo de búsqueda, incluida en su presentación final

El grupo B, presenta un modelo pre-algebraico (ver Figura 4). Calculan un tiempo máximo y un tiempo mínimo para encontrar el portátil. La solución que aportan es pues un intervalo de tiempo: entre 18 y 49 minutos. Ambos grupos incluyen además unas rutas óptimas de búsqueda.


* Datos los cálculos hechos Sumando: el tiempo de tardanza de registrar las clases + el tiempo entre clase y clase 18 min aprox	* Datos los cálculos hechos Sumando: el tiempo de tardanza de registrar las clases + el tiempo entre clase y clase + la subida de los pisos  49 min aprox
---	---

Figura 4. Expresiones utilizadas por el grupo B para calcular el tiempo mínimo y máximo de búsqueda, incluidas en su presentación final

Finalizada la presentación de ambos grupos, se inicia un debate, en el que cada grupo expone por qué considera que su modelo es mejor. En la Tabla 7 mostramos un episodio de este debate.

Transcripción			Interpretación	
1	P	Pero, ¿hay mucha diferencia entre lo vuestro y lo suyo? [se dirige a los alumnos del grupo A]	<i>Invitación a la reflexión</i>	<i>Rol: Moderador</i>
2	B1	No porque... o sea, yo me he dado cuenta que aproximadamente da lo mismo [se refiere al resultado máximo dado como solución por su grupo, 49 minutos, y el dado por el grupo A, 58 minutos].	<i>Explicación</i>	
3	P	Con respecto al tiempo sí, lo cual puede suponer que no era descabellado ni lo vuestro [refiriéndose al grupo B] ni lo vuestro [refiriéndose al grupo A], os vais 9 minutos...	<i>Explicación</i>	<i>Rol: Experto</i>
4	P	...pero me refiero a la fórmula, respecto a cómo maneáis las variables...	<i>Invitación a la reflexión.</i>	<i>Rol: Moderador</i>
5	A1	Lo mismo, muy parecido, solo que nosotros hemos tomado unas cuantas variables más y las hemos agrupado en una fórmula, pero...	<i>Explicación</i>	
6	A2	Hemos hecho todo un poco más general.		

Tabla 7. Extracto del debate intergrupo durante la sesión de exposición

En este episodio del debate intergrupo hemos identificado dos nuevos roles del profesor, no recogidos en la taxonomía propuesta por Burkhardt (2006). Para nosotros, la distinción entre debate intragrupo e intergrupo viene marcado precisamente por la necesidad de la comunicación de los resultados y su papel central en el proceso de validación. Téngase en cuenta que, a diferencia de los problemas tradicionales, en general, en las tareas de modelización no se establecen categorías en términos de modelos correctos o incorrectos sino en términos de otras categorías como puedan ser modelos que describen mejor o de forma más precisa el problema, que son adaptables o generalizables a otros problemas que admiten una estructura matemática similar frente a otros más específicos (Vicente et al., 2008). Así pues el debate intergrupo que se genera en la confrontación de ideas en esta fase de exposición pública pone de relieve su importancia dentro del proceso de modelización. El profesor, en [1, Tabla 7], invita a ambos grupos a que reflexionen sobre las diferencias entre sus modelos y las soluciones obtenidas a partir de ellos. Hemos denominado “moderador” al papel que asume en este caso y cuya finalidad es la de conducir y moderar el debate que se produce entre los alumnos hacia los aspectos más relevantes del proceso de modelización. Posteriormente, en [3, Tabla 7], expone su parecer respecto a los resultados obtenidos, completando la información presentada. Esta intervención se corresponde a un nuevo papel, que hemos denominado “experto”. En [4, Tabla 7], y de nuevo como moderador, centra el debate en el aspecto formal del modelo presentado por el grupo A.

En la tabla 8 mostramos otro episodio de este debate entre ambos grupos.

Transcripción			Interpretación	
1	P	La única diferencia es el número de personas que buscan, que eso no lo habéis tenido en cuenta, ellos si lo ponen como variable [refiriéndose al grupo A].	<i>Recapitulación</i>	<i>Rol: Experto</i>
2	B2	Pero yo lo que no entiendo es que si ellos buscan tres y nosotros buscamos uno, como es que da prácticamente el mismo tiempo. O sea, lo habéis dividido entre las tres personas... entonces os costaría el doble [se dirige a los alumnos del grupo B].	<i>Petición de aclaración</i>	
3	A1	Un tercio.	<i>Aclaración</i>	
4	B2	Ya, pero si lo hiciera una persona os costaría el triple.	<i>Petición de aclaración</i>	
5	A1	Sí.	<i>Asentimiento</i>	

Tabla 8. Extracto del debate intergrupo durante la sesión de exposición

El profesor, en [1, Tabla 8], asume de nuevo el papel de “experto”. Señala y pone de relieve aquellos aspectos del modelo construido por el grupo A que el grupo B no ha tenido en cuenta (en esta ocasión la inclusión de la variable “número de personas que buscan”), poniendo en valor la resolución del grupo A frente a la del grupo B. De este modo, estos dos roles, “moderador” y “experto”, están motivados por la propia fase de validación del ciclo de modelización, y se convierten en pieza clave en la evaluación de los resultados. Como “moderador”, el profesor conduce el debate hacia aspectos relevantes pertenecientes tanto al mundo real (selección de las variables), como al mundo matemático (uso del lenguaje algebraico), en el proceso de construcción de los modelos, mientras que como “experto”, debe emitir juicios que destaquen la relevancia y riqueza de unos modelos sobre otros (la generalización y reutilización del modelo propuesto por el grupo A frente al propuesto por el grupo B), pero también sus limitaciones y errores. El proceso de validación se produce pues gracias al debate que se origina, de forma natural, con el contraste entre los modelos presentados por los distintos grupos de alumnos, guiado por el profesor en este doble papel, moderador y experto.

Finalmente, en la Tabla 9, hemos identificado los distintos roles que el profesor asume durante su gestión de la actividad de sus alumnos, señalando el objetivo que cumplen, el momento en que se producen, su desencadenante, y el tipo de intervención.

Papel del profesor	Objetivo	Momento	Desencadenante	Tipo de intervención
Observador	Documentar el estado actual del proceso de resolución de los alumnos.	Debate intragrupo	Iniciativa del profesor.	Invitación a la participación. Petición de aclaración/explicación. Recapitulación.
Gestor de recursos	Proporcionar nuevas vías de resolución. Ayudar a centrar el problema.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.	Establecimiento de consenso. Invitación a la reflexión.

Papel del profesor	Objetivo	Momento	Desencadenante	Tipo de intervención
Asesor	Aconsejar y resolver dudas.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos.	Aclaración. Explicación. Aconsejar. Petición de aclaración.
Moderador	Moderar y conducir el debate.	Debate intergrupo	Iniciativa del profesor.	Petición de aclaración/explicación. Invitación a la reflexión.
Experto	Emitir juicios. Completar la información. Comparar los modelos construidos por grupos distintos.	Debate intergrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.	Exposición. Explicación. Recapitulación. Establecimiento de consenso.

Tabla 9. Rol del profesor durante la actividad modelizadora

Los tipos de intervención observados en el profesor durante su gestión del debate intragrupo, se corresponden, en su mayoría, a lo que Morera (2013) denomina *Invitación a la participación*, en su papel de observador, dando pie a que los alumnos enuncien sus ideas y estrategias, e *Invitación a la reflexión*, como gestor de recursos, cuando proporciona posibles vías de resolución sobre las que los alumnos pueden reflexionar. Ya como asesor, las intervenciones se centran en la *Explicación* y *Aclaración* de partes del proceso de modelización. En su gestión del debate intergrupo, aparece el nuevo rol de moderador, asociado a intervenciones del tipo *Petición de aclaración/explicación* de aspectos que los alumnos exponen durante su presentación final, y como experto, sus intervenciones son más del tipo *Exposición* y *Explicación*, cuando remarca las ventajas de un modelo sobre otro. No hemos detectado intervenciones del tipo *Corrección de vocabulario matemático o de procedimiento matemático* o *Formalización*, sí identificadas en el trabajo de Morera, quizás porque su estudio se centra en un tipo de problema muy concreto (problemas de isometrías), asociado a unos conceptos y procedimientos cerrados, en contraposición a los problemas de modelización abiertos propuestos en nuestra investigación, y en los que el proceso de matematización horizontal ha resultado el principal escollo con el que se han enfrentado nuestros alumnos.

Conclusiones

En el debate intragrupo los alumnos establecen sus estrategias de resolución a través del consenso. Durante estos debates el profesor asume el papel de “observador” para poder documentar y diagnosticar el estado de su proceso de resolución, pidiendo a los alumnos que verbalicen y expongan sus ideas. En caso de dudas, desavenencias o bloqueos, el profesor asume otros papeles distintos: “gestor de recursos”, promoviendo la exploración de nuevas vías de resolución; o “asesor”, respondiendo a sus preguntas. Estas intervenciones se hacen, como hemos visto, de forma indirecta, a través de la formulación de preguntas que sugieren, pero no imponen, una determinada dirección.

Las discusiones mostradas en los episodios utilizados como ejemplos se centran en diferentes aspectos del proceso de modelización: la simplificación de la realidad y la selección de variables (en la Tabla 3, en la primera sesión de trabajo); las matemáticas necesarias para su resolución (ver Tabla 4, también durante la primera sesión); y la generalización y reutilización

de los modelos (ver Tabla 5, en la segunda sesión). Pero también hemos identificado otros tipos de discusión, referidos a lo que los alumnos consideran que debe ser un problema de matemáticas y la propia naturaleza de las tareas de modelización propuestas (ver Tabla 6, en la tercera sesión).

Ya en la exposición pública, el profesor conduce el debate intergrupo hacia aquellos aspectos que considera más relevantes. El proceso de resolución finaliza cuando se considera que, o bien se ha llegado a una solución razonable, o bien ha concluido el tiempo fijado para la actividad, lo que no quiere decir que se haya agotado por completo el problema, pues este puede seguir enriqueciéndose durante el debate intergrupo. Hemos identificado dos nuevos roles del profesor, no recogidos por Burkhardt (2006), durante este debate. El profesor, en su rol de “moderador”, alienta a que este debate se apoye en argumentos matemáticos y no se base, únicamente, en criterios de gusto u opinión, ayudando a los alumnos, como “experto”, a reflexionar sobre aspectos propios del proceso de modelización o de las matemáticas involucradas (tal y como se observa en el episodio mostrado en Tabla 7). Asimismo, en su rol de “experto”, emite juicios sobre la validez de los resultados y los procesos matemáticos seguidos, completando la información proporcionada y contrastando los modelos construidos por los diferentes grupos, estableciendo el nivel de adecuación de unas soluciones frente a otras (en Tabla 8), como elemento esencial de evaluación.

Finalmente, el papel último del profesor es posibilitar que estos dos tipos de debates, el intragrupo y el intergrupo, se den promoviendo la participación activa, la reflexión y el pensamiento crítico de sus alumnos. La caracterización del papel desempeñado por el profesor que hemos realizado en este artículo pretende abrir el debate de la gestión en el aula de una actividad de modelización, especialmente en aquellos profesores que se introducen por primera vez en una tarea de este tipo. Esta caracterización de los roles del profesor es indispensable si se pretende incorporar las metodologías basadas en la modelización como una herramienta más en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas dentro del aula.

Referencias bibliográficas

- Barbosa, J. (2006). Mathematical modelling in classroom: a social-critical and discursive perspective, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 293-301.
- Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2006). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, P.L. Galbraith, y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (45-56). Heidelberg: Springer.
- Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. (2006), Teaching Mathematical Modelling through project work, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 163-177.
- Blum, W. y Borromeo, B. (2009). Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, 453-465.
- Borromeo, R. y Blum, W. (2011). Are integrated thinkers better able to intervene adaptively? A case study in a mathematical modeling environment. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda

- (Eds.), *CERME 7 - Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (927-936). Poland: University of Rzeszow.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 178-195.
- Calabuig, J.M., Ferrando, I., Gallart, C., García-Raffi, L.M., Hurtado, D. y Sierra, L. (2015). La modelización como competencia transversal en el sistema educativo español. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 69, 44-51.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. En G. Stillman, W. Blum, G. Kaiser (Eds) *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (223-232). Springer, Cham.
- Doerr, H. (2006). Teachers' Ways of Listening and Responding to Students' Emerging Mathematical Models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 255-268.
- Ferrer, M., Fortuny, J.M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 385-405.
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L.M. (2015a). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números*, 88, 93-103.
- Gallart C., Ferrando, I. y García-Raffi, L.M. (2015b). El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria. *SUMA*, 79, 9-16.
- Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de València.
- García, F.J. y Ruiz, L. (2011). Modifying teachers' practices: The case of a european training course on modelling and applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (569-578). Dordrecht: Springer.
- Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., y Pekrum, R. (2010). The role of the situation model in Mathematical Modeling-Task analyses, student competencies and teacher interventions. *Journal für Didaktik Didaktik*, 31, pp. 119-141.
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving, en R. Lesh y H. Doerr (eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, (3-34). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.
- Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- Maaß, K. y Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modeling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (629-639) Dordrecht: Springer.
- Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.
- OCDE (2006). PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura. Recuperado el 2 de septiembre del 2013 en <http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf>

- Quesada, A., Ariza, M. R., Abril, A. M. y García, F. (2014). Building on teachers' beliefs to support inquiry pedagogies. *Looking for synergies between two European projects. In INTED2014. Proceedings, 8th International Technology, Education and Development Conference* (4370-4378).
- Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 47(7), 1255-1267.
- Stender P., Krosanke N., Kaiser G. (2017). Scaffolding Complex Modelling Processes: An In-Depth Study. En G. Stillman, W. Blum, G. Kaiser (Eds.) *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (467-477). Springer, Cham.
- Vicente, S., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), 391-406.